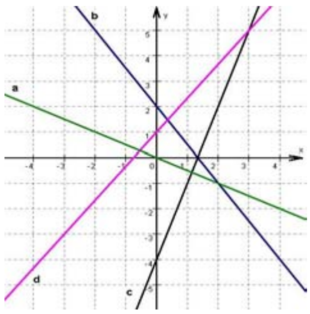
Aufgaben zu den Grundtechniken

1. Zeichne den Grafen der Funktion.

g1: $y = 2x - 3$	g4: $f(x) = -\frac{1}{2}x + 4$
g2: $y = \frac{4}{5}x - 3$	g5: $-2x + y = 1$
g3: $5x = 10$	g6: $12x - 15y = 45$

2. Lies aus der Grafik die Gleichung der Funktionen ab.



3. Berechne jeweils den Funktionswert an der Stelle x_0 = -3; 0; 1; 5.

g1: $y = 2x - 7$	g2: $f(x) = -12x + \frac{7}{8}$
g3: $y = -\frac{5}{3}x + 4$	g4: $f(x) = 7$

4. Liegt der Punkt P(1|-3) auf der Geraden g?

g1: $y = \frac{9}{217}x + \frac{8}{311}$	g2: $f(x) = 4x - 7$
g3: $y = -\frac{2}{9}x + \frac{1}{8}$	g4: $y = \frac{251}{324}x - 11\frac{181}{216}$

5. Stelle mit Hilfe der Steigung m und dem Punkt P eine Geradengleichung auf.

g1: $m = -3{,}5$	$P(-3 \mid 11{,}5)$
g2: $m = 2{,}8$	$P(-6{,}15 \mid -14{,}97)$
g3: $m = 17{,}1$	$P(3{,}8 \mid 64{,}58)$
g4: $m = -\frac{25}{11}$	$P(\frac{11}{5} \mid -11)$

6. Stelle mit Hilfe der beiden Punkte P_1 und P_2 eine Geradengleichung auf.

g1: $P_1(8 \mid 10)$	$P_2(-5 \mid -29)$
g2: $P_1(9{,}1 \mid \frac{29}{15})$	$P_2(4{,}8 \mid 4{,}8)$
g3: $P_1(22 \mid -\frac{311}{9})$	$P_2(-0{,}99 \mid \frac{877}{900})$
g4: $P_1(37 \mid 26)$	$P_2(-37 \mid -22)$

7. Gebe die Gleichung der Parallelen an, die durch P(3|7) verläuft?

g1: $y = -\frac{4}{3}x + 1$	g2: $f(x) = 2x + \frac{7}{8}$
g3: $y = \frac{3}{17}x + 1{,}9$	g4: $y = -8x + \frac{11}{5}$

8. Gebe die Gleichung der Normalen an, die durch P(-4|-3) verläuft?

g1: $y = 9x - 3$	g2: $f(x) = \frac{2}{7}x + \frac{5}{6}$
g3: $y = -\frac{1}{3}x + 1$	g4: $y = \sqrt{2}\,x + 8$

9. Gib den Steigungswinkel der Geraden an.

g1: $y = 2x - 3$	g2: $f(x) = -5x + 8$
g3: $y = \frac{2}{7}x + 12$	g4: $y = 4{,}81$

10. Berechne den Schnittwinkel der beiden Geraden.

a)	g1: $y = 7x - 4$	g2: $y = \frac{2}{3}x - 1$
b)	g1: $f(x) = 5x + \frac{2}{5}$	g2: $y = -9x - 3{,}8$
c)	g1: $y = -2{,}7x + 9$	g2: $y = -5{,}9x - 1{,}4$
d)	g1: $y = \sqrt{2}\,x + \sqrt{3}$	g2: $y = -\sqrt{3}\,x - \sqrt{2}$
e)	g1: $y = 2x - 3$	g2: $y = 9$

11. Bestimme die Nullstelle der Funktion f(x).

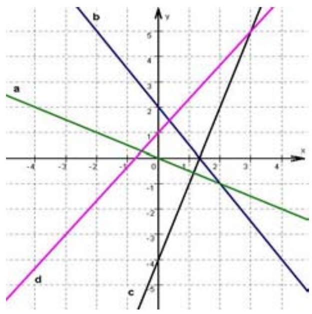
g1: $y = \frac{2}{7}x + 3$	g2: $f(x) = -\frac{3}{11}x + 4{,}1$
g3: $y = -\frac{7}{8}x - \frac{3}{7}$	g4: $y = \sqrt{5}\,x + 21$

12. Bestimme die relative Lage der Geraden.

a)	g1: $y = 7x - 4$	g2: $y = \frac{2}{3}x - 1$
b)	g1: $f(x) = 5x + \frac{2}{5}$	g2: $y = -9x - 3{,}8$
c)	g1: $y = -2{,}7x + 9$	g2: $y = -5{,}9x - 1{,}4$
d)	g1: $y = \sqrt{2}\,x + \sqrt{3}$	g2: $y = -\sqrt{3}\,x - \sqrt{2}$
e)	g1: $y = 2x - 3$	g2: $y = 9$

Anwendungen zu den Grundtechniken

13. Gib die Terme für die dargestellten Funktionen an, berechne die Steigungswinkel und vergleiche durch Messung mit der Grafik.



14. Gehört die Wertetabelle zu einer linearen Funktion?

Wenn ja, bestimme den Funktionsterm.

a)

x	2	5	8	11
y	13	37	61	85

b)

x	2	4	6	8
y	1	7	11	19

c)

x	-2	5	7	8
y	9	-5	-9	-11

15. Ermittle (soweit möglich) bei den folgenden Geraden

a) die Steigung m, den Steigungswinkel α, Monotonie
b) den y-Achsenabschnitt b und die Nullstelle x_N,
c) die Definitions- und Wertemenge.

d) die Symmetrie-Eigenschaften
e) die Umkehrfunktion
f) Zeichne die zugehörigen Grafen mit verschiedenen Farben in ein geeignetes Koordinatensystem.
g) Berechne die fehlenden Koordinaten und kontrolliere mit der Grafik.

	x	f(x)
g_1: $y=2x-3$	-2,7	
g_2: $y=\frac{4}{5}x-3$		- 8
g_3: $5x=10$		3,1
g_4: $f(x)=-\frac{1}{2}x+4$	$\frac{6}{7}$	
g_5: $-2x+y=1$		15,2
g_6: $12x-15y=45$	$-\frac{9}{17}$	

16. Ermittle aus den Eigenschaften des Grafen G_f rechnerisch den Funktionsterm f der zugehörigen linearen Funktion:

a) G_f schneidet die x-Achse bei $x=3$ mit der Steigung 2.
b) G_f schneidet die x-Achse bei 4 und die y-Achse bei 7.
c) G_f verläuft parallel zu g_a durch A(2 | -5).
d) G_f schneidet die Gerade g_a senkrecht in ihrer Nullstelle.
e) G_f geht bei 2 unter einem Winkel von 17° durch die x-Achse.
f) Die Abszissenachse wird von G_f unter einem Winkel von 60° geschnitten; in P(4|2) schneidet G_f eine weitere Gerade orthogonal. Wie lauten die beiden Funktionen?

17. Gib die Geradengleichung, den Steigungswinkel und die Nullstelle der linearen Funktion an, die durch die Punkte P(2 | t) und Q(4t | 5) verläuft.

18. Gib die Gleichungen zweier Geraden an, die sich in P(-2|6) rechtwinklig schneiden.

19. Untersuche rechnerisch, ob die drei Punkte ein Dreieck bilden?

a)	$P_1(-2 \mid 2)$	$P_2(5 \mid -4)$	$P_3(1,5 \mid -2)$
b)	$P_1(2a+1 \mid 6a+0,5)$	$P_2(2-5a \mid 3,5-15a)$	$P_3(-a-1 \mid -3a-5,5)$
c)	$P_1(\frac{2}{a} \mid 1-\frac{8}{a})$	$P_2(-\frac{1}{a} \mid 1+\frac{4}{a})$	$P_3(a^2 \mid -4a^2+1)$
d)	$P_1(-1 \mid -1,5)$	$P_2(0,4 \mid 2,42)$	$P_3(5,1 \mid 15,58)$

20. Die beiden Gleichungen geben eine Schar wieder:
g: $f_b(x)=2,5x+b$ h: $f_m(x)=m\cdot x+3-2m$

a) Zeichne die Grafen der Scharen in jeweils ein geeignetes Koordinatensystem, verwende für den Parameter m bzw. b die Werte –3, -2, -, 0, 1, 2 und 3.
b) Welche Gemeinsamkeiten zeigen die Grafen auf?
c) Wie muss der Parameter m bzw. b gewählt werden, damit eine Gerade durch den Punkt A(-1 | 6) bzw. B(2 | 3) verläuft.
d) Für welche Werte von m ist der Schnittwinkel zwischen den Grafen von g und h 30°.
e) Berechne die Nullstellen von g und h.
f) Zwei Geraden von h bilden für |m| ein Dreieck mit der x-Achse. Stelle eine Flächenformel A(m) auf. Für welches m beträgt sein Inhalt genau 3,6 FE?

21. Gehe von der Normalenform $y=mx+b$ aus und zeige, dass eine lineare Funktion, welche die Achsenschnittpunkte S_x(a_1 | 0) und S_y(0 | a_2) besitzt, in der sogenannten Achsenabschnittsform (AAF) geschrieben werden kann: $\frac{x}{a_1}+\frac{y}{a_2}=1$.
Welche Einschränkungen müssen dabei beachtet werden?
Schreibe die Geraden aus (2) in der AAF und gib ihre Achsenschnittpunkte an.

22. Bestimme die Nullstellen der Geraden, die man erhält, wenn man g: 2y – 4 x = 12
a) an der y-Achse spiegelt.
b) an der y-Achse spiegelt.
c) an der 1. Winkelhalbierenden spiegelt.

23. Nimm kritisch zur folgenden Aussage Stellung: „Jede lineare Funktion f(x) = m x + b ist punktsymmetrisch zum Schnittpunkt mit der y-Achse Sy(0 | b)."

Koordinatengeometrie

24. Welcher Punkt der Geraden liegt dem Punkt P(3 | 4) am nächsten?

g_1: $f(x)=-2x+\frac{5}{8}$ g_2: $f(x)=7x+11$
g_3: $f(x)=-\frac{9}{2}x-\frac{5}{3}$ g_4: $f(x)=3x+12$

25. Fälle vom Punkt A(2|7) das Lot auf die Gerade 2x – 5y = 12. Wie lauten die Koordinaten des Lotfußpunktes; wie lang ist das Lot?

26. Gesucht ist ein Punkt C, so dass man mit den Punkten A(2 | 5) und B(-3 | -4) ein gleichschenkliges Dreieck mit rechtem Winkel bei C erhält.

27. Was für ein Viereck bilden die Punkte, wie groß sind die Innenwinkel?
a) A(1,1 | 0,4), B(0,8 | 0,45), C(1,3 | 0,95), D(1,6 | 0,9)

b) A(1 | 2), B(3 | 4), C(5 | 6), D(7 | 8)

28. Liegt P auf der Strecke AB?

a)	A(-5,1 | -14,51)	B(3,2 | 2,92)	P(1,8 | -0,02)
b)	A(4 | -15,7)	B(-3 | 14,4)	P(5,8 | -23,44)
c)	A(4,3 | 5,66)	B(2,8 | 6,86)	P(7,3 | 3,86)

29. Gib den vierten Eckpunkt, den Mittelpunkt des Vierecks ABCD, die Größe der Innenwinkel und die Schnittwinkel der Diagonalen an:

a) Rechteck: A(1 | 2), B(3|4), C(5|6)

b) Raute: A(7 | 8), B(9 | 10), D(11 | 12)

c) sym.Trapez: A(1 | 2), B(3 | 4), C(5 | 6)

30. Gegeben sind die Punkte A(1 | 2), B(6 | 1) und C(3 | 7). Zeichne diese Punkte in ein geeignetes Koordinatensystem und verfolge jeden der Rechenschritte grafisch nach!

a) Beweise rechnerisch, dass die 3 Punkte A, B, C ein Dreieck bilden.
b) Formuliere jeweils drei Geradengleichungen, auf denen die folgenden Strecken liegen:
   i) Dreieck-Seiten: g_{AB}, g_{AC} und g_{BC}
   ii) Mittelsenkrechten: m_a, m_b, m_c
   Mittelsenkrechte: $\perp$ durch Mittelpunkt einer Dreieckseite.
   iii) Seitenhalbierenden: s_a, s_b und s_c
   Seitenhalbierende: Eckpunkt & gegenüberliegender Mittelpunkt
   iv) Höhen: h_a, h_b und h_c
   Höhe: Eckpunkt; $\perp$ zur gegenüberliegenden Seite
c) Berechne die Längen der genannten Strecken.
d) Verlaufen die Höhen inner- oder außerhalb des Dreiecks?
e) Berechne den Schnittpunkt der jeweils drei
   i)Mittelsenkrechten: M
   ii) Seitenhalbierenden: S
   iii) Höhen: H
h) Weise nach, dass diese drei Schnittpunkte M, S und H auf einer Geraden, der sogenannten "Euler-Geraden", liegen.
i) Zeige, dass $|SH| = 2 \cdot |SM|$ ist.
j) Berechne den Abstand des Schnittpunktes der Mittelsenkrechten M zu den Eckpunkten A, B und C. Welche geometrische Bedeutung hat M?
k) In welchem Verhältnis teilt S die Seitenhalbierenden?
l) Berechne die Innenwinkel, den Umfang und den Flächeninhalt des Dreiecks ABC.

PS: Wer mehr über die Euler-Gerade wissen möchte, kann sich nette Informationen und spielerische Anregungen im Internet holen:
http://www.didmath.ewf.uni-erlangen.de/Vorlesungen/Geometrie_HS/3_Figuren_Koerper/Dreieckstransversale/Eulergeradetxt.html

Der Ladevorgang dauert einen Augenblick, dann einen Eckpunkt A,B,C anklicken und verschieben.

31. Löse die Aufgabe (30) für die Punkte A(5 | 3), B(1 | 2), C(7 | 5).

32. Jede Gerade, die mit negativer Steigung m durch den Punkt A(4|3) verläuft, grenzt mit den Koordinatenachsen im ersten Quadranten ein rechtwinkliges Dreieck ab.
Berechne den Flächeninhalt des Dreiecks in Abhängigkeit vom m.

Anwendungsaufgaben

33. Beschreibe wenigstens drei Beispiele für lineare Funktionen aus dem täglichen Leben, aus der Wirtschaft und aus der Physik.

34. Erwin möchte Äpfel kaufen: 1 kg kostet 1,50 €, Sabine bevorzugt eine andere Sorte zu 1,80 € / kg.

Weil die Äpfel zu schwer sind, lassen die beiden sich nach Hause fahren. Sabine nimmt für ihren 3,9 km langen Heimweg eine Fahrradritschka für 1 € je Kilometer und 2 € Startgeld. Erwin wohnt in einem 17,3 km entfernten Vorort und bestellt sich ein Taxi mit einer Anfahrtpauschale von 5 € bei einem Kilometerpreis von 1,20 € / km.

Stelle Funktionsterme für den Kauf der beiden Apfelsorten bzw. für die Heimfahrten auf, bestimme deren Definitions- und Wertemenge und zeichne die Grafen in ein geeignetes Koordinatensystem.
a) Um welchen Funktionstyp handelt es sich bei diesen Funktionen?
b) Welche Bedeutung haben die unterschiedlichen Preise für die Funktionen?
c) Welche Menge Äpfel können sie je für 12,50 € kaufen?
d) Was kosten die Heimfahrten und wer ist zuerst daheim?

35. Peter ist LKW-Fahrer der Mühle Blau-Weiß und beliefert die Bäckereien der Umgebung mit Mehl in Säcken je 51,5 kg. Am Mühlentor wird der LKW beim Ein- und Ausfahren gewogen. Vor dem Wiegen wird das Fahrzeug betankt und bringt, mit 500 Säcken voll beladen, 33,340 to auf die Waage.

a) Wegen einer Fehlbestellung kehrt Peter mit 18 Säcken zurück: die Waage zeigt 8,517 to an.
   Stelle eine Gleichung auf, welche die Abhängigkeit der LKW-Gesamtmasse von der Anzahl der Mehlsäcke beschreibt und zeichne den zugehörigen Grafen in ein Koordinatensystem.
b) Wie groß ist das Leergewicht?

c) Wie viele Säcke dürfen geladen werden, damit die maximale Nutzlast von 26,41 to nicht überschritten wird.
d) Wie viele Säcke sind geladen, wenn die Waage 13,976 to anzeigt?
e) Gestern kam Peter mit fast leerem Tank zurück. Mit einer Retoure von 22 Säcken zeigte die Waage 7,953 to an. Wie viel kg Treibstoff fast der Tank?

36. Eine zylinderförmige Regenzisterne hat einen Durchmesser von 1,9 m und eine Höhe von 2,5 m; das Überlaufrohr befindet sich 40 cm unterhalb des Deckels. Die Zisterne ist an eine 105 m^2 große Dachfläche angeschlossen.
a) Wie viel Wasser kann die Zisterne höchstens speichern?
b) Bei einem starken Dauerregen fallen in einer Stunde 64 l/ m^2. Beschreibe den Wasserstand in der Zisterne als Funktion der Zeit[Min.], wenn er zu Beginn schon 17 cm beträgt.
c) Welchen Wasserstand findet man nach 20 Min. vor?
d) Wann läuft das Wasser in den Kanal über?
e) Ermittle zeichnerisch und rechnerisch die Umkehrfunktion. Welche Bedeutung hat sie?

37. Der Mobilfunk-Anbieter „HandyTime" bietet folgende Tarife an:

Beträge in €	Fun-Time		Classic-Time		Prepaid-Time		Flat-Time	
Basis	10,-		20,-		0,-		200.-	
	Hauptzeit	Nebenzeit	Hauptzeit	Nebenzeit	Hauptzeit	Nebenzeit	Hauptzeit	Nebenzeit
Ortsgespräche	0,15	0,15	0,15	0,15	0,15	0,15	0,00	0,00
Übriges Festnetz	0,65	0,20	0,35	0,20	0,75	0,20	0,00	0,00
Time zu Time	0,35	0,20	0,35	0,20	0,80	0,20	0,00	0,00
Anschlußpreis (einmalig)	~~20,-~~		~~20,-~~		~~20,-~~		~~20,-~~	

Vergleiche die Tarife ins übrige Festnetz zur Hauptzeit.
a) Stelle die Funktionsgleichungen der verschiedenen Tarife auf. Welche Funktionstypen liegen vor?
b) Zeichne die Schaubilder.
c) Bestimme zeichnerisch als auch rechnerisch, den jeweils günstigsten Tarif in Abhängigkeit von den Gesprächsminuten.

38. Der Geschäftsführer des Kinos „CineONE" hat folgende wirtschaftliche Situation analysiert:

Kosten:	
Fix	
Miete:	3000 € **pro Monat**
Personal (Gehälter):	2500 € **pro Monat**
Personal (Aushilfen):	500 € **pro Monat**
Nebenkosten (Strom/Wasser):	150 € **pro Monat**
Werbung:	350 € **pro Monat**
Versicherung:	600 € **pro Monat**
Variable	
Abgaben an Filmverleih:	2 € **pro Besucher**
Einkauf (Speisen & Getränke):	3 € **pro Besucher**

Einnahmen:	
Fix	
Werbe-Einnahmen:	700 € **pro Monat**
Variable	
Eintritt:	6 € **pro Besucher**
Verkauf (Speisen & Getränke):	5 € **pro Besucher**

a) Betrachte die Kostenfunktion in Abhängigkeit von der Anzahl der Besucher pro Monat und stelle sie in der Form $K(x) = m \cdot x + b$ auf. Für welche Kostentypen stehen m und b?
b) Lege eine geeignete Wertetabelle an und zeichne das Schaubild.
c) Stelle die Einnahmen als Erlösfunktion in der Form $E(x) = m \cdot x + b$ auf.
d) Erstelle eine Wertetabelle auf der Basis der Besucherzahlen aus der Teilaufgabe b und zeichne den Grafen der Erlösfunktion in das angelegte Schaubild.
e) Bestimme den Break-even Point zeichnerisch und rechnerisch. Welche Bedeutung hat der Break-even Point für die Besucherzahlen?

Break-even Point ist der Zeitpunkt, zu dem ein Unternehmen aufhört, Verluste einzufahren und statt dessen Gewinn macht.

Bestimmung der Gewinnschwelle: $\mathbf{E(x) = K(x)}$

f) Ermittle die Gewinnfunktion $G(x) = E(x) - K(x)$. Zeichne das Schaubild von G(x). Bestimme die Nullstelle von G(x). Wie ist die Nullstelle wirtschaftlich zu deuten?
g) Ab welcher Besucherzahl liegt der Gewinn über 12.000 € pro Monat?
h) Das Kino benötigt im nächsten Jahr einen neuen Projektor zum Neupreis von 15.500 €. Nach 5 Jahren hat er noch einen Schrottwert von 500 €.

<u>Abschreibung:</u> Kosten für betrieblich oder beruflich genutzte Wirtschaftsgüter, mit einem Anschaffungspreis von über 400€ inkl. MwSt., müssen steuerlich auf die Jahre der voraussichtlichen Nutzung verteilt werden.

<u>Lineare Abschreibung:</u> Die Kosten eines Wirtschaftsgut werden gleichmäßig auf alle Jahre der Nutzung aufgeteilt.

$$\begin{array}{c}\text{Jährlicher Ab-} \\ \text{schreibungsbetrag}\end{array} = \frac{\text{Anschaffungspreis} - \text{Schrottwert}}{\text{Jahre der Nutzung}}$$

Stelle die Funktion f: Alter des Projektors (in Jahren) $\mapsto$ Wert (in €) auf.
Zeichne das Schaubild und bestimme den Wert des Projektors nach 4 Jahren.
Zu welchem Zeitpunkt ist der Projektor noch 5.000 € wert? Bestimme diesen Zeitpunkt sowohl rechnerisch als auch zeichnerisch.